分裂四元数矩阵的满秩分解及应用

武秀美
(菏泽学院 数学与统计学院,山东 菏泽 274015)

摘 要:利用分裂四元数矩阵的复表示研究了分裂四元数矩阵满秩分解的代数方法。把广义逆的概念推广到分裂四元数矩阵代数上,最后利用广义逆研究了分裂四元数线性方程组解的问题。

关键词:分裂四元数;分裂四元数矩阵;复表示;满秩分解;广义逆

中图分类号:O151 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-0143(2018)04-0314-06

DOI:10.16389/j.cnki.cn42-1737/n.2018.04.005

Full Rank Decomposition of Split Quaternion Matrix and Its Application

WU Xiumei
(School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze 274015, Shandong, China)

Abstract: In this article, the algebraic method of full rank decomposition of split quaternion matrix was studied by means of complex representation of split quaternion matrix. This paper extended the concept of generalized inverse to split quaternion matrix algebra and finally studied the solution of split quaternion linear equation by generalized inverse.

Key words: split quaternion; split quaternion matrix; complex representation; full rank decomposition; generalized inverse

1843年Hamilton研究了四元数体 H ,并记作

$$H=\{q=q_1+q_2i+q_3j+q_4k;\ q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbf{R}\},$$

其中 $i^2=j^2=k^2=-1,\ ijk=-1$ 。

1849年James Cockle探讨了分类四元数环 H_s ,并记作

$$H_s=\{q=q_1+q_2i+q_3j+q_4k;\ q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbf{R}\},$$

其中 $i^2=-1, j^2=k^2=1, ijk=1$ 。

分裂四元数环是结合代数和不可交换的4维Clifford代数,并且它包含零因子、幂零因子和非平凡的幂等元。分裂四元数环和四元数环是两种不同的非交换四维Clifford代数,后者是一个非交换的体,而前者不是。因此分裂四元数环的代数结构比四元数体的代数结构更为复杂。

分裂四元数的研究是最近比较新的一个课题,国内外许多专家学者对分裂四元数的性质及应用展开了探讨。文献[1-3]研究了分裂四元数在几何上的应用,文献[4-7]系统地给出了分裂四元数的分

收稿日期:2018-03-20
作者简介:武秀美(1979—),女,讲师,硕士,研究方向:代数几何。

析性质和代数性质,文献[8-9]探讨了分裂四元数矩阵的可对角化问题及最小二乘问题。本文利用分裂四元数的复表示研究了分裂四元矩阵满秩分解的代数方法,定义了分裂四元数矩阵的广义逆,利用分裂四元数矩阵满秩分解定理给出了广义逆的若干性质,最后利用分裂四元数矩阵的广义逆,给出了分裂线性方程组的解。

1　分裂四元数矩阵的复表示

$\mathbf{R}$ 表示实数域,$\mathbf{C}=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}i$ 表示复数域,$\boldsymbol{H}_s=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}i\oplus\mathbf{R}j\oplus\mathbf{R}k$ 表示分裂四元数环,其中 $i^2=-1$, $j^2=k^2=1, ijk=1$ 。$\boldsymbol{F}^{m\times n}$ 表示环 $\boldsymbol{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵的全体。

定义1　对于任意 $x=x_1+x_2i+x_3j+x_4k=y+zj\in\boldsymbol{H}_s$,其中 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}, y=x_1+x_2i, z=x_3+x_4i, y,z\in\mathbf{C}$,则称 2×2 的矩阵 $\begin{bmatrix} y & z \\ \bar{z} & \bar{y} \end{bmatrix}$ 为分裂四元数 x 的复表示,记为 x^f 。

定义2　对于任意 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2i+\boldsymbol{A}_3j+\boldsymbol{A}_4k=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2j\in\boldsymbol{H}_s^{m\times n}$,其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\in\mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2i, \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4i, \boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\in\mathbf{C}^{m\times n}$,则称 $2m\times 2n$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \overline{\boldsymbol{B}_2} & \overline{\boldsymbol{B}_1} \end{bmatrix}$ 为分裂四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复表示,记为 $\boldsymbol{A}^f$ 。

命题1　对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{H}_s^{m\times n}, \boldsymbol{D}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times t}, a\in\mathbf{R}$,则

1)若 $\boldsymbol{A}^f=\boldsymbol{B}^f$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^f=\boldsymbol{A}^f+\boldsymbol{B}^f$;

3) $(a\boldsymbol{A})^f=a\boldsymbol{A}^f$;

4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D})^f=\boldsymbol{A}^f\boldsymbol{D}^f$;

5)令 $\boldsymbol{Q}_t=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_t \\ \boldsymbol{I}_t & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{I}_t$ 为 t 阶单位矩阵,则 $\boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{A}^f\boldsymbol{Q}_n=\overline{\boldsymbol{A}^f}$ 。

由命题1得到如下结果:

定理1　$\boldsymbol{H}_s\cong\boldsymbol{H}_s^f, \boldsymbol{H}_s^{m\times n}\cong\left(\boldsymbol{H}_s^{m\times n}\right)^f$ 。

由定理1可知,一个分裂四元数即为一个复二阶矩阵,分裂四元数环上 $m\times n$ 矩阵的性质即为一个复数域上 $2m\times 2n$ 矩阵的性质。

2　分裂四元数矩阵的共轭转置矩阵及性质

定义3　对于任意 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2i+\boldsymbol{A}_3j+\boldsymbol{A}_4k\in\boldsymbol{H}_s^{m\times n}$,其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 。$\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2i-\boldsymbol{A}_3j-\boldsymbol{A}_4k$;$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\triangleq(x_{ts})\in\boldsymbol{H}_s^{n\times m}$;$\boldsymbol{A}$ 的共轭转置 $\boldsymbol{A}^*\triangleq\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times m}$ 。

定义4　对 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times n}$,如果存在 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times n}$,使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$,其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵,那么 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

引理1[10]　对于任意给定的 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{H}_s^{m\times n}, \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times s}$,有下面结果成立:

1) $\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)^{\mathrm{T}}=\overline{\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)}$;

2) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

3) 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可逆的,那么 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

4) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,那么 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$ 。

定理2　令 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{H}_s^{n\times n}$,则 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^f$ 相似于 $\left(\boldsymbol{A}^f\right)^*$ 。

证明 令 $A=A_1+A_2i+A_3j+A_4k=B_1+B_2j$,其中 $B_1=A_1+A_2i, B_2=A_3+A_4i$,则 A 的共轭转置矩阵 $A^*=B_1^*-B_2^{\mathrm{T}}j$,从而 $(A^*)^f=\begin{pmatrix} B_1^* & -B_2^{\mathrm{T}} \\ -\overline{B_2^{\mathrm{T}}} & \overline{B_1^*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1^* & -B_2^{\mathrm{T}} \\ -B_2^* & B_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$;A 的复表示矩阵 $A^f=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}$,从而 $(A^f)^*=\begin{pmatrix} B_1^* & B_2^{\mathrm{T}} \\ B_2^* & B_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 。对于复矩阵 $\begin{pmatrix} B_1^* & -B_2^{\mathrm{T}} \\ -B_2^* & B_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} B_1^* & B_2^{\mathrm{T}} \\ B_2^* & B_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 显然是相似的,所以 $(A^*)^f$ 相似于 $(A^f)^*$ 。

定义5 若 $A\in H_s^{m\times n}$,则分裂四元数矩阵 A 的秩定义为 $rank\,(A)=\frac{1}{2}rank(A^f)$ 。

定理3 若 $A\in H_s^{m\times n}, B\in H_s^{n\times s}$,则 $rank\,(AB)\leqslant \min\{rank\,(A), rank\,(B)\}$ 。

证明 利用复表示矩阵和复数域上秩的不等式易得。

定理4 令 $A\in H_s^{m\times n}$, $rank\,A=r$,则有

1) A^*A 和 AA^* 都是Hermite矩阵;

2) $rank\,(A^*A)=rank\,(AA^*)=rank\,(A)=r$;

3) $A^*A=0$ 当且仅当 $A=0$ 。

证明 1)因为 $(A^*A)^*=A^*(A^*)^*=A^*A$,所以 A^*A 是Hermite矩阵;同理可证 A^* 是Hermite矩阵。

2) A^*A 的复表示是 $(A^*A)^f=(A^*)^f(A)^f$,由定理3知 $(A^*)^f(A)^f$ 相似于 $(A^f)^*(A)^f$ 。因为在复数域上 $rank\left((A^f)^*(A)^f\right)=rank\left((A)^f\right)$,所以 $rank\,(A^*A)=rank\,(A)$ 。同理可证 $rank\,(AA^*)=rank\,(A)$ 。所以 $rank\,(A^*A)=rank\,(AA^*)=rank\,(A)=r$ 。

3)充分性显然成立。由2)知必要性也是成立的。

3 分裂四元数矩阵的满秩分解

在这一部分给出分裂四元数矩阵的满秩分解理论。

定理5 设 $A\in H_s^{m\times n}$, $rank\,(A)=r$,则存在 $B\in H_s^{m\times r}, C\in H_s^{r\times n}$,且 $rank\,(B)=rank\,(C)=r$,满足 $A=BC$ 。

证明 不妨设分裂四元数矩阵 $A=A_1+A_2i+A_3j+A_4k=B_1+B_2j$,其中 $A_1, A_2, A_3, A_4\in \mathrm{R}^{m\times n}, B_1=A_1+A_2i\in C^{m\times n}, B_2=A_3+A_4i\in C^{m\times n}$ 。

分裂四元数矩阵 A 的复表示矩阵为 $A^f=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}$,令 $P=(B_1\quad B_2), Q=(\overline{B_2}\quad \overline{B_1})$,则 $A^f=\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$,且 $Q=\bar{P}Q_n$ 。

因为 $P\in C^{m\times 2n}$,所以存在 $P_1\in C^{m\times r}, P_2\in C^{r\times 2n}$,使得 $P=P_1P_2$ 。从而知 $Q=\overline{P_1}\,\overline{P_2}Q_n$ 。

所以 $A^f=\begin{pmatrix} P_1P_2 \\ \overline{P_1}\,\overline{P_2}Q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \overline{P_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 \\ \overline{P_2}Q_n \end{pmatrix}$ 。

令 $P_2=(P_{21}\quad P_{22})$,其中 $P_{21}\in C^{r\times n}, P_{22}\in C^{r\times n}$,则 $\overline{P_2}Q_n=(\overline{P_{22}}\quad \overline{P_{21}})$ 。

令 $B=P_1\in H_s^{r\times m}, C=P_{21}+P_{22}j\in H_s^{r\times n}$,且 $B^f=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \overline{P_1} \end{pmatrix}, C^f=\begin{pmatrix} P_{21} & P_{22} \\ \overline{P_{22}} & \overline{P_{21}} \end{pmatrix}$,所以

$$A^f=\begin{pmatrix} P_1P_2 \\ \overline{P_1}\,\overline{P_2}Q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \overline{P_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 \\ \overline{P_2}Q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \overline{P_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{21} & P_{22} \\ \overline{P_{22}} & \overline{P_{21}} \end{pmatrix}=B^fC^f ,$$

即 $A^f=B^fC^f$ 。

由命题1知 $A=BC$ 。结论得证。

例 设 $A=A_1+A_2i+A_3j+A_4k\in H_s^{2\times 2}$,其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的满秩分解。

解 分裂四元数矩阵 $A=B_1+B_2j$,其中 $B_1=\begin{pmatrix}1&1\\i&i\end{pmatrix}$,$B_2=\begin{pmatrix}1&i\\1&i\end{pmatrix}$。所以分裂四元数矩阵 A 的复表示为

$$A^f=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\\overline{B_2}&\overline{B_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&i\\i&i&1&i\\1&-i&1&1\\1&-i&-i&-i\end{pmatrix}。$$

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1&i\\i&i&1&i\end{pmatrix}$,$Q=\begin{pmatrix}1&-i&1&1\\1&-i&-i&-i\end{pmatrix}$。对于 P,存在矩阵 $P_1=\begin{pmatrix}1&0\\i&1\end{pmatrix}$,$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1&i\\0&0&1-i&1+i\end{pmatrix}$,使得 $P=P_1P_2$。从而 $Q=\begin{pmatrix}1&1&1&-i\\0&0&1+i&1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-i&1\end{pmatrix}=\overline{P_2}\,\overline{P_1}$。

所以 $A^f=\begin{pmatrix}P_1P_2\\\overline{P_2}\,\overline{P_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1&0\\0&\overline{P_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{21}&P_{22}\\\overline{P_{22}}&\overline{P_{21}}\end{pmatrix}$,其中 $P_{21}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,$P_{22}=\begin{pmatrix}1&i\\1-i&1+i\end{pmatrix}$。

令 $B=P_1, C=P_{21}+P_{22}j$,则 $B^f=\begin{pmatrix}P_1&0\\0&\overline{P_2}\end{pmatrix}$,$C^f=\begin{pmatrix}P_{21}&P_{22}\\\overline{P_{22}}&\overline{P_{21}}\end{pmatrix}$,所以 $A^f=B^fC^f$,从而 $A=BC$,其中 $B=\begin{pmatrix}1&0\\i&1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&i\\1-i&1+i\end{pmatrix}j$。

4 分裂四元数矩阵的广义逆

定义6 设分裂四元数矩阵 $A\in H_s^{m\times n}$,如果存在分裂四元数矩阵 $G\in H_s^{n\times m}$ 满足条件 $AGA=A$,则称 G 为分裂四元数矩阵 A 的广义逆,记作 A^-。

定理6 设 $A\in H_s^{m\times n}$,$\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq 0$,则有

1)$\left(A^*\right)^-=\left(A^-\right)^*$;

2)$rank\left(A^-\right)\geqslant rank\left(A\right)$;

3)$(\lambda A)^-=\frac{1}{\lambda}A^-$。

证明 1)因为对于任意 $A\in H_s^{m\times n}$ 有 $A^*=\left(AA^-A\right)^*=A^*\left(A^-\right)^*A^*$,由定义6知 $\left(A^*\right)^-=\left(A^-\right)^*$。

2)由定理4知,$rank\,(A^-)\geqslant rank\left(AA^-\right)\geqslant rank\left(AA^-A\right)=rank\left(A\right)$。

3)因为 $\lambda\neq 0$,由 $AA^-A=A$ 得 $(\lambda A)\frac{1}{\lambda}A^-(\lambda A)=\lambda AA^-A\frac{1}{\lambda}\lambda=\lambda A$,所以 $(\lambda A)^-=\frac{1}{\lambda}A^-$。

定理7 设 $A\in H_s^{m\times n}$,则有

1)$AA^-=I_m$ 当且仅当 A 为行满秩矩阵;

2)$A^-A=I_n$ 当且仅当 A 为列满秩矩阵;

3)对于任意 $G\in H_s^{n\times m}$,$AGA=A$ 当且仅当 $A^*AGA=A^*A$。

证明 1)若 $AA^-=I_m$,则有

$$rank\left(AA^-\right)\geqslant rank\left(AA^-A\right)=rank\left(A\right)\geqslant rank\left(AA^-\right),$$

所以 $rank\left(A\right)=rank\left(AA^-\right)=rank\left(I_m\right)=m$,即 A 为行满秩矩阵。

反之,若 A 为行满秩矩阵即 $rank\left(A\right)=m$,于是 $rank\left(A\right)=rank\left(AA^-A\right)\leqslant rank\left(AA^-\right)\leqslant rank\left(A\right)$,

所以 $rank\left(AA^-\right)=m$ 。由于 AA^- 是 m 阶方阵，故 AA^- 可逆，因此有 $AA^-=AA^-\left(AA^-\right)\left(AA^-\right)^{-1}=AA^-\left(AA^-\right)^{-1}=I_m$。

2)证明过程同1)。

3)若 $AGA=A$ ，则有 $A^*AGA=A^*A$ 。反之，若 $A^*AGA=A^*A$ ，则有

$$\left(AGA-A\right)^*\left(AGA-A\right)=\left(A^*G^*A^*-A^*\right)\left(AGA-A\right)=\left(A^*G^*-I_n\right)\left(A^*AGA-A^*A\right)=\boldsymbol{0}。$$

由定理4知 $AGA-A=0$ ，即得 $AGA=A$ 。

定理8　设 $A\in H_s^{m\times n}$ ，且 $rank\left(A\right)=r<\min\{m,n\}$ ，且有满秩分解 $A=CD$ ，则有 $A^-=D^-C^-$ 。

证明　由定理7知，$C^-C=I_r$, $DD^-=I_r$ ，所以

$$A\left(D^-C^-\right)A=C\left(DD^-\right)\left(C^-C\right)D=CI_rD=CD=A。$$

5　分裂四元数线性方程组的解

在这一部分，利用分裂四元数矩阵的广义逆讨论相容分裂四元数线性方程组解的问题。

定理9　设 $A\in H_s^{m\times n}$ ，$\boldsymbol{x}\in H_s^{n\times 1}$, $\boldsymbol{b}\in H_s^{m\times 1}$ ，则存在 $n\times m$ 矩阵 $G\in H_s^{n\times m}$ 使 $\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{b}$ 是相容分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $G=A^-$ ，即 G 满足 $AGA=A$ 。

证明　充分性　设 $G=A^-$ ，即 $AGA=A$ 。由于分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是相容的，所以存在 $\boldsymbol{x}_0\in H_s^{n\times 1}$ 使 $A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$ 。因此 $AG\boldsymbol{b}=AGA\boldsymbol{x}_0=A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$ ，所以 $\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{b}$ 是分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。

必要性　由题意知存在 $G\in H_s^{n\times m}$ ，使 $\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{b}$ 是相容分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，对于任意 $\boldsymbol{b}\in H_s^{m\times 1}$ 都成立。特别当 $A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$ 时，对 A 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也有 $AG\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i,\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 。所以 $AG\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$ ，即 $AGA=A$ ，故 $G=A^-$ 。

推论1　分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容的充分必要条件是 $AA^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ 。

证明　必要性　若分裂四元数方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容，则由定理9知 $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，所以 $AA^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ 。

充分性　令 $\boldsymbol{x}_0=A^-\boldsymbol{b}$ ，则 $A\boldsymbol{x}_0=AA^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ ，所以 $\boldsymbol{x}_0$ 是分裂四元数方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，故 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容。

定理10　设 $A\in H_s^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}\in H_s^{n\times 1}$ ，则分裂四元数齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{y}$ ，其中任意 $\boldsymbol{y}\in H_s^{n\times 1}$ 。

证明　因为 $A\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{y}=\left(A-AA^-A\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ，所以 $\boldsymbol{x}=\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{y}$ 是分裂四元数齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是分裂四元数齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意解，则

$$\boldsymbol{x}_0=A^-A\boldsymbol{x}_0+\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{x}_0=\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{x}_0,$$

所以分裂四元数齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{y}$ ，其中任意 $\boldsymbol{y}\in H_s^{n\times 1}$ 。

定理11　设 $A\in H_s^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}\in H_s^{n\times 1}$ ，则相容分裂四元数线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{b}+\left(I_n-A^-A\right)\boldsymbol{y}$ ，其中任意 $\boldsymbol{y}\in H_s^{n\times 1}$ 。

证明　由定理10和非齐次线性方程组解的结构可知定理成立。

例　利用广义逆求分裂四元数线性方程组 $\begin{cases}x_1+jx_2-kx_3=i\\ix_1+kx_2=j\\jx_1-ix_2=k\end{cases}$ 的通解。

解　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & j & -k\\ i & k & 0\\ j & -i & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}i\\ j\\ k\end{bmatrix},$$

则分裂四元数线性方程组可表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 。系数矩阵的广义逆为

$$\boldsymbol{A}^{-}=\begin{bmatrix}-1-i & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i & \frac{1}{2}(j+k)\\ j-k & -\frac{1}{2}(k+j) & -\frac{1}{2}(1-i)\\ -k & j & 0\end{bmatrix}。$$

由定理11知分裂四元数线性方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b}+\left(\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{y},\ \forall\boldsymbol{y}\in H_s^{3\times 1}$ 。

参考文献(References)

[1] KULA L, YAYLI Y. Split quaternions and rotations in semi euclidean space[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2007, 44(6): 1313-1327.

[2] KYRCHEI I. The column and row immanants over a split quaternion algebra[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2015, 25(3): 611-619.

[3] KYRCHEI I. Cramer's rules for some hermitian coquaternionic matrix equations[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2017, 27(5): 1-21.

[4] POGORUY A A, RODRIGUEZ-DAGNINO R M. Some algebraic and analytical properties of coquaternion algebra[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2010, 20(1): 79-84.

[5] ALAGOZ Y, ORAL K H, YUCE S. Split quaternion matrices[J]. Miskolc Mathematical Notes, 2012, 2(2): 223-232.

[6] ERDOGDU M, OZDEMIR M. On complex split quaternion matrices[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2013, 23(3): 625-638.

[7] OZDEMIR M. The roots of a split quaternion[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(2): 258-263.

[8] JIANG T, JIANG Z, ZHANG Z. Algebraic techniques for diagonalization of a split quaternion matrix in split quaternion mechanics[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56(8): 223-232.

[9] ZHANG Z Z, JIANG Z W, JIANG T S. Algebraic methods for least squares problem in split quaternionic mechanics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 269: 618-625.

[10] ERDOGDU M, OZDEMIR M. On eigenvalues of split quaternion matrices[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2013, 23(3): 615-623.

(责任编辑:胡燕梅)